حل التمارين الآتية:

التمرين الأول: لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 4} = \frac{1}{n^2-5n+6}$

١. برهن أن $\frac{1}{2} \geq U_n > 0$

التمرين الثاني: لتكن لدينا المتتالية: $\begin{cases} X_0 = 2 \\ X_{n+1} = X_n + 4 \end{cases}$

١. احسب نهاية X_n

التمرين الثالث: ليكن θ عدد حقيقي في المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ نعرّف المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ وفق

$$\begin{cases} U_0 = 2\cos\theta \\ U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} \end{cases}$$

١. احسب U_1 , U_2

٢. اثبت بالتدريج أن $U_n = 2\cos(\frac{\theta}{2^n})$

٣. استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$

التمرين الرابع: لتكن لدينا المتتالية $X_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ ادرس إطراد المتتالية.

التمرين الخامس: لتكن لدينا المتتالية $(u_n) = \frac{2n+(-1)^{-n}}{3n+4}$ احسب نهاية u_n
$n > 0$

التمرين السادس: لتكن لدينا المتتالية u_n:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n+1} \end{cases}$$

١- أثبت أن $1 < u_{n+1} < u_n$

٢- استنتج أن u_n متناقضة ومتقاربة واحسب نهايتها.

التمرين السابع: ليكن لدينا المتتالية $(u_n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
$n \geq 1$

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

١- عبّر عن S_n بدلالة n

٢- اثبت بالتدريج أن $S_n = \frac{n}{n+1}$ واحسب نهاية S_n

حل المسألة الآتية:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $u_{n+1} = \dfrac{-1+2u_n}{u_n}$ و $u_0 = 2$ والمطلوب:

1) أثبت بالتدريج أن $u_n > u_{n+1} > 1$ ثم استنتج أن المتتالية u_n متقاربة.

2) نعرّف المتتالية $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$ ، أثبت v_n حسابية ، عين حدها الأول وأساسها.

3) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أن $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$ واحسب $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

4) هل المتتالية u_n محدودة من الأعلى بالعدد 2 ؟ ، هل هي محدودة؟

5) أثبت أن $v_n > u_n$ أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 1$.